经济数学 06

朱 晨

中国农业大学经济管理学院

动态最优化

动态最优化

- 静态最优化问题中，我们的目标是给每个选择变量找到一个单一值，使得目标函数值极大或极小。
- 动态优化问题：我们需要考虑一个计划时期，比如从初始点 $t=0$ 到终点 $t=T$，试图发现在这个时间段中的最佳行动过程。因此每个变量的解不是一个值，而是一条时间路径。
- 动态分析的一个显著特征是将时间因素纳入分析范围：连续变量（积分学、微分方程）或离散变量（差分方程）。
- 动态优化问题的最优控制构造方法把注意力集中于一个或多个控制变量，这些变量充当最优化工具。

动态最优化

- 静态模型中的问题是求出满足某些特点均衡条件的内生变量的值。
- 动态模型在已知变化的基础上（如给定瞬时变化率），描述某些变量的变化间路径：
  - 假定人口规模 H 随时间以速率 $\frac{dH}{dt} = t^{-1/2}$ 变化
  - 问题：人口$H = H(t)$ 的何种时间路径可以产生以上变化率？
- 已知导数求原函数——积分法
  - $H(t) = 2t^{1/2} + c$
- 引入额外信息：初始条件、边界条件
  - 假定初始人口$H(0) = 100$，则$H(0) = c = 100$
  - 时间路径为$H(t) = 2t^{1/2} + 100$：描述了变量 H 随时间变化的过程，为此动态模型的解。
- 讨论中以$F(x)$ 表示原函数，$f(x)$ 表示导函数。

积分基本法则

1. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$，$n \neq -1$
2. $\int e^x dx = e^x + c$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$，$x > 0$
4. $\int f'(x)e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$
5. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + c$，$f(x) > 0$
6. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
7. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$
8. $\int f(u) \frac{du}{dx} dx = \int f(u) du = F(u) + c$
9. $\int v du = uv - \int u dv$
10. $\int_a^x f(x) dx = F(x) - F(a)$
11. $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$

投资与资本形成

- 资本形成是增加给定资本存量的过程。
- 将此过程视为一个连续过程，我们可以将资本存量表示为时间的函数$K(t)$，并以导数$\dot{K} \equiv dK/dt$ 表示资本形成率。
- 又：在时间t 的资本形成率与以$I(t)$ 表示的净投资率相等。
- 因此资本存量与净投资可通过如下方程联系起来

$$\frac{dK}{dt} \equiv I(t) \tag{1}$$

$$K(t) = \int I(t)dt = \int \frac{dK}{dt}dt = \int dK \tag{2}$$

- K：存量概念；I：流量概念。

例 6.1

假设净投资流量以方程$I(t) = 3t^{1/2}$ 表示，在时间$t = 0$ 时初始资本存量为$K(0)$。求资本 K 的时间路径。

解：将$I(t)$ 对 t 积分得到

$$K(t) = \int I(t)dt = \int 3t^{1/2}dt = 2t^{3/2} + c$$

令 t=0，则$c = K(0)$。因此 K 的时间路径为

$$K(t) = 2t^{3/2} + K(0)$$

由此，还可求出某一时间区间内的资本形成数量（定积分）。

最优控制理论（Optimal Control Theory）

最优控制理论

- Lev Pontryagin and Richard Bellman in 1950s v.s. 经典变分法（17 世纪）
- 最优控制理论是处理动态最优化问题的现代方法，可以处理非古典特征如拐角解。
- 三种变量类型：时间变量t，状态变量$y(t)$，控制变量$u(t)$。
- 控制变量占据中心地位，充当最优化工具——名称的由来。
- 一个最优控制问题必须包含一个联系 y 和 u 的方程：

$$\frac{dy}{dt} = y'(t) = \dot{y} = f[t, y(t), u(t)] \tag{3}$$

- 这个方程被称为运动方程（equation of motion，或状态方程/转移方程），表明给定状态变量的值，在任何时刻，决策者对 u 的选择将如何在时间上驱使状态变量 y。
- 一旦得出最优控制变量路径$u^*(t)$，通过运动方程可得到$y^*(t)$。

最优控制的最简单问题：一个状态变量 y，一个控制变量 u

假设我们的问题是一段时间内的利润最大化问题：

- 在时间 t 的任何一点，我们必须选择控制变量$u(t)$
- $u(t)$ 可以通过运动方程来影响状态变量$y(t)$
- $y(t)$ 决定利润
- 目标函数应该是 t=0 到 t=T 期间的积分形式
- 我们可以写出一个简单的最优控制问题：

$$\text{Max} \quad V = \int_0^T F(t, y, u)\, dt \tag{4}$$

$$\text{s.t.} \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y} = f(t, y, u) \quad \text{（运动方程）} \tag{5}$$

$$y(0) = A, \quad y(T)\text{是自由的（A、T 给定）} \tag{6}$$

$$u(t) \in U, \ \forall t \in [0, T]. \tag{7}$$

最优控制理论

- 目标函数是一个积分。
- 被积函数 $F(t, y, u)$ 定义了在时间 t，控制变量 u 和其所决定的 t 时刻的 y，共同决定 t 时刻目标函数的最大值。
- 运动方程提供了控制变量 u 的选择可以转化为状态变量 y 特定的运动模式的机制。
- 通常情况下，u 和 y 之间的联系可以通过一阶微分方程$\dot{y}=f(t, y, u)$ 来体现（有时需使用二阶微分方程描述）。
- 被积函数 F 和运动方程 f 都假设对于所有变量都是连续的，对于状态变量 y 和时间 t 都拥有一阶偏导数。
- 给定初始状态：$t=0$ 时 y 的值是固定值 A。但是对 y 的终点值 $y(T)$ 没有限制。
- u 的选择被限制在控制域 U 中。

一个简单的宏观经济模型

假设一个经济通过投入资本 K 和固定数量的劳动力 L 来生产产出 Y，生产函数为

$$Y = Y(K, L)$$

此外，产出要么用于消费 C，要么用于投资 I。若忽略折旧，那么

$$I = \frac{dK}{dt}$$

即投资是资本存量在时间上的变化。这样我们能够把投资写为

$$I = Y - C = Y(K, L) - C = \frac{dK}{dt}$$

这给出了关于变量 K 的一阶微分方程。

一个简单的宏观经济模型

如果我们的目标是在一个固定的计划时期内使社会效用最大化，那么问题变为

$$\text{Max} \int_0^T U(C)dt \tag{8}$$

$$\text{s.t.} \quad \frac{dK}{dt} = Y(K, L) - C \tag{9}$$

$$K(0) = K_0, \quad K(T) = K_T. \tag{10}$$

- C 是控制变量
- K 是状态变量（终点设为固定值）
- 问题是选择最优控制路径 C(t)，使得它对产出 Y 和资本 K 产生的影响以及这些影响对 C 本身的反作用，使得计划期内的总体效用最大化

最大值原理

最大值原理（The Maximum Principle）

- 最优控制理论的关键是被称为最大值原理的一阶必要条件。
- 表述方法类似于拉格朗日函数和拉格朗日乘数变量。
- 在最优控制问题中，我们有汉密尔顿函数（Hamiltonian funciton，H）和协状态变量（costate variable，λ）。
- 最大值原理包含关于状态变量 y 和协状态变量λ 的两个一阶微分方程，同时要求在每个时刻关于控制变量 u 最大汉密尔顿函数。
- 在最大值原理下，不特别要求 H 关于 u 是可微的——广泛适用。

汉密尔顿函数

$$
\begin{aligned}
&\text{Max} \quad V = \int_0^T F(t,y,u)dt \\
\text{s.t. } &\frac{dy}{dt} = \dot{y} = f(t,y,u) \quad \text{（运动方程）} \\
&y(0) = A, \quad y(T)\text{是自由的（A、T 给定）} \\
&u(t) \in U, \ \forall t \in [0,T].
\end{aligned}
$$

- 已出现三个变量：时间 t，状态变量 y，控制变量 u。在解的过程中会出现协状态变量（或称共积变量/辅助变量）。
- 协状态变量$\lambda(t)$：与拉格朗日乘子类似，度量相应状态变量的影子价格。
- 协状态变量通过汉密尔顿函数进入最优控制问题。
- 汉密尔顿函数定义为：

$$H(t,y,u,\lambda) \equiv F(t,y,u) + \lambda(t)f(t,y,u) \qquad (11)$$

最大值原理的条件

$$\text{（i）} \quad \text{Max}_u \; H(t, y, u, \lambda) \quad \forall t \in [0, T]$$

$$\text{（ii）} \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \qquad \text{（状态方程/y 的运动方程）}$$

$$\text{（iii）} \quad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y} \qquad \text{（协状态方程/}\lambda\text{ 的运动方程）}$$

$$\text{（iv）} \quad \lambda(T) = 0 \qquad \text{（横截条件）}$$

- 条件（i）意味着 H 是仅关于选择变量 u 的最大化问题，等价形式为$H(t, y, u^*, \lambda) \geq H(t, y, u, \lambda) \;\; \forall t \in [0, T]$，其中$u^*$ 为最优控制。
- 特例：在汉密尔顿函数对 u 可微，能得到解的情况下，条件（i）可以写为$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$（有边界解时不成立）。
- 此横截条件适用于自由终点状态、且为垂直终结线时。

例 6.2

$$\text{Max} \quad V = \int_0^T -\sqrt{(1+u^2)}dt$$

$$\text{s.t.} \quad \dot{y} = u$$

$y(0) = A, \quad y(T)$自由（A、T 给定）

【步骤 1】这一问题的汉密尔顿函数可写为

$$H = -\sqrt{(1+u^2)} + \lambda u$$

例 6.2

观察到 H 是可微且非线性，可以应用一阶条件得到

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{1}{2}(1+u^2)^{-1/2}(2u) + \lambda = 0$$

解得

$$u(t) = \lambda(1-\lambda^2)^{-1/2}$$

由于$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -(1+u^2)^{-3/2} < 0$，所以确实为最大化 H。现在我们需要寻找$\lambda$ 的解以得到 u。

例 6.2

【步骤 2】为了解λ 我们需要使用它的运动方程$\dot{\lambda} = -\partial H/\partial y$，而由于 H 不是关于 y 的函数，所以可以推出

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda(t)\text{为常数}$$

根据横截性条件$\lambda(T) = 0$ 可得到协状态变量的最优路径为

$$\lambda^*(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$$

代入，得到

$$u^*(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$$

例 6.2

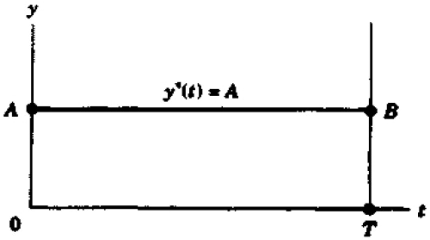
【步骤 3】根据运动方程$\dot{y} = u$，可以写出

$$\dot{y} = 0 \longrightarrow y(t)\text{为常数}$$

根据初始条件$y(0) = A$ 可得到

$$y^*(t) = A$$

i.e. y^* 路径是一条水平直线：



例 6.3

求满足下面条件的最优路径

$$\text{Max} \int_0^1 (y - u^2)dt$$

$$\text{s.t. } \dot{y} = u$$

$$y(0) = 5, \quad y(1)\text{自由}$$

这一问题的汉密尔顿函数可写为

$$H = y - u^2 + \lambda u$$

例 6.3

由于 H 对于 u 是凹的，且 u 没有任何限制，因此可以通过一阶条件使 H 最大化

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -2u + \lambda = 0$$

解得

$$u(t) = \frac{\lambda}{2} = \dot{y}$$

例 6.3

λ 的运动方程为

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -1$$

直接积分 $\Longrightarrow$

$$\lambda(t) = -t + c_1$$

根据横截性条件$\lambda(T) = \lambda(1) = 0$，将 t=1 代入上式，可以得到$c_1 = 1$。因此，协状态变量的最优路径为

$$\lambda^*(t) = 1 - t$$

例 6.3

代回$\dot{y}$

$$\dot{y} = \frac{1-t}{2}$$

积分 $\Longrightarrow$

$$y(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}t^2 + c_2$$

根据初始条件$y(0) = 5$，将 t=0 代入上式，可以得到$c_2 = 5$。因此，状态变量的最优路径为

$$y^*(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}t^2 + 5$$

是什么使得一个变量变为一个“控制”变量？

考虑一个简单的经济学实例

- 假设在一个经济中有一种可耗尽资源的一个有限贮量 S（e.g. 石油），并且$S(0)=S_0$。
- 当这种资源被抽取用尽时，它的贮量将按下列关系消减

$$\frac{dS(t)}{dt} = -E(t)$$

- E(t) 代表时间 t 时这种资源的抽取速度，它可作为一个控制变量，因为其具有下列两个特征
  - (a) E(t) 受制于我们的选择
  - (b) E(t) 的选择影响变量 S(t)，后者指明任何时刻资源的状态
- E(t) 像个“导航装置”，我们可以操纵它来使得状态变量 S(t) 达到各种状态，继而达到目标函数的不同状态。

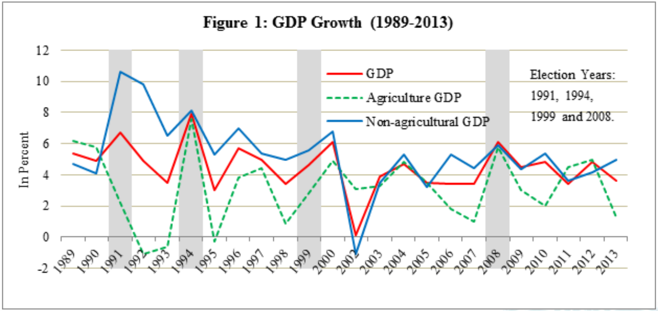
是什么使得一个变量变为一个“控制”变量？

我们可以假设社会想要最大化在给定时期 [0, T] 上使用这种可耗尽资源所带来的总效用，如果最终贮量不受限制，那么动态最优化问题可以具有如下形式

$$\begin{aligned} &\text{Max} \int_0^T U(E)e^{-\rho t}dt \\ \text{s.t.}\ &\frac{dS}{dt} = -E(t) \\ &S(0) = S_0,\quad S(T)\text{自由} \end{aligned}$$

控制变量是一个政策工具，它使我们能够影响状态变量。

政治与经济的交错：政治商业周期（Political Business Cycle）



- 一般认为，当国家总体经济情况处于良好状态时，往往有助于现任执政者或政党取得胜选连任。选举与总体经济表现之间的互动关系因而成为学界关注的焦点。

政治商业周期

William Nordhaus（1975）就政治周期可能影响经济决策提供了早期模型：

- 选民投票偏好通常被认为是短视（myopic ）而非基于理性预期（rational expectation ）。
- 执政者为了争取最多选票，通常在选举临近时出台刺激经济政策，促使景气提升及失业率下降，“讨好” 选民。
- 而为了消除扩张性政策所带来的通货膨胀压力，执政者会在选后改行紧缩政策，导致失业率回升，直至下次选举前才又采取扩张性政策。
- 如此循环便形成选前扩张、选后紧缩的政治商业周期性波动现象。

政治商业周期

- 核心经济变量：失业率U 和通货膨胀率p——选民的主要经济忧虑。
- 选举函数：

$$v = v(U, p) \quad (v_U < 0, v_p < 0) \tag{12}$$

其中v 是执政党的得票能力，U 和p 的高值都会损失选票。

- U 和p 之间存在一种政治折衷：如果执政党由于造成了较高的通货膨胀率而使选民不高兴，那么可以通过充分降低失业率来弥补选票损失。
- 此外两个变量间也存在一个经济折衷（菲利普斯关系：通货膨胀与失业率）：

$$p = \phi(U) + a\pi \quad (\phi' < 0, 0 < a \leq 1) \tag{13}$$

- 其中π 代表预期通货膨胀率，并按照下列微分方程自适应形成：

$$\dot{\pi} = b(p - \pi) \quad (b > 0) \tag{14}$$

执政党的最优控制问题

- 假设一个政党在$t=0$ 时刚刚赢得大选，且下一次大选将在$t=T$ 时举行，因此执政党拥有总共 T 年时间来影响选民以期赢得选票。
- 在时期$[0,T]$ 中的任何时刻，U 和 p 的一对现值将决定 v 的一个具体值，这些不同时刻的 v 值都必须进入执政党的目标函数。
- 由于选民具有很短的群体记忆并且更容易被最近发生的事件影响，因此越往后时期的 v 值应被赋予更大的权重。

执政党的最优控制问题

执政党的最优控制问题可构造如下：

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & \int_0^T v(U,p)e^{rt}dt \\
\text{s.t.} \quad & p = \phi(U) + a\pi \\
& \dot{\pi} = b(p-\pi) \\
& \pi(0) = \pi_0, \quad \pi(T)\text{自由}
\end{aligned}
$$

- π 为状态变量
- U 为控制变量（假定政府任何时刻可以实现选定的目标失业率）
- 不同时刻 v 的加权体系具有指数函数e^{rt}
- $r>0$ 代表记忆的衰退率（后期的 v 值被赋予更大的权重，折现率的反面）

执政党的最优控制问题

为了定量求解，Nordhaus 假设如下具体函数形式：

$$v(U,p) = -U^2 - hp \quad (h > 0)$$
$$p = (j - kU) + a\pi \quad (j,k > 0, 0 < a \leq 1)$$

最优控制问题可以写为：

$$\text{Max} \int_0^T (-U^2 - hj + hkU - ha\pi)e^{rt}dt$$
$$\text{s.t.} \quad \dot{\pi} = b[j - kU - (1-a)\pi]$$
$$\pi(0) = \pi_0, \quad \pi(T)\text{自由}$$

执政党的最优控制问题

汉密尔顿函数为：

$$H = (-U^2 - hj + hkU - ha\pi)e^{rt} + \lambda b[j - kU - (1-a)\pi]$$

关于控制变量 U 最大化 H，我们有：

$$\frac{\partial H}{\partial U} = (-2U + hk)e^{rt} - \lambda bk = 0$$

因此控制路径为：

$$U(t) = \frac{1}{2}k(h - \lambda be^{-rt})$$

由于$\partial^2 H/\partial U^2 = -2e^{rt} < 0$，所以上述控制路径确实在每个时刻最大化 H。现在我们需要寻找$\lambda(t)$。

执政党的最优控制问题

根据λ 的运动方程：

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \pi} = hae^{rt} + \lambda b(1-a)$$

可重写为如下形式：

$$\dot{\lambda} - b(1-a)\lambda = hae^{rt}$$

解此一阶线性微分方程（具有一个常数系数和一个可变项）得到余函数λ_c 和特解（§14.1、§15.6）：

$$\lambda_c = Ae^{b(1-a)t} \quad (A\ \text{任意})$$

$$\bar{\lambda} = \frac{ha}{B}e^{rt} \quad (B \equiv r - b + ab)$$

由此得到通解为：

$$\lambda(t) = \lambda_c + \bar{\lambda} = Ae^{b(1-a)t} + \frac{ha}{B}e^{rt}$$

执政党的最优控制问题

根据横截条件$\lambda(T)=0$，令 t=T，可解得：

$$A=(-ha/B)e^{BT}$$

因此：

$$\lambda(t)=\frac{ha}{B}\left[e^{rt}-e^{BT+b(1-a)t}\right]$$

代入，化简，得到：

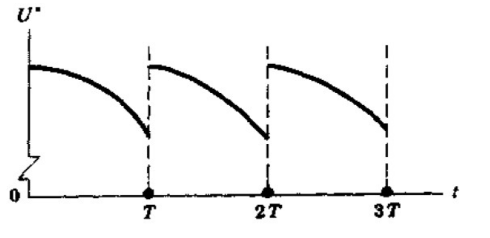
$$U^{*}(t)=\frac{kh}{2B}\left[(r-b)+bae^{B(T-t)}\right]$$

此为为了在 T 年赢得大选，执政党应遵循的最优控制路径。

执政党的最优控制问题

经济含义：

- $U^*(t)$ 是 t 的减函数，选票最大化的经济政策是在 t=0 时设置一个较高的失业水平，然后让失业率在整个大选周期 [0,T] 中稳定下降。
- 最优失业路径$U^*(t)$：



- 最优通货膨胀率$p^*(t)$ 的一般模式是在每个大选周期开始时较低，但是经历一个稳定的攀升，与$U^*(t)$ 轮廓相反。

随堂问题

$$\text{Max} \int_0^2 (y - u^2) dt$$

$$\text{s.t.} \quad \dot{y} = u$$

$$y(0) = 0, \quad y(2)\text{自由}$$

要确保 H 被最大化而不是最小化。